

Title	Omoituita mama, IX
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 142 p.199-p.204
Issue Date	1937-10-11
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74555">https://doi.org/10.18910/74555</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 630. *Omoituita mama*, IX

福 原 満 洲 雄 (九大)

1.  $n$ 階微分方程式 = ツイテ,  $x = \alpha_i$  デ  $y = \beta_i$  トナル解ノ存在ヲ一般的ニ研究スルノニ, コレヲ聯立微分方程式ニ関スル問題ニ直ストイフ方法ニ期待ヲ持ツテ居ナカッタノデハナイ。何ノ期待モ持タヌモノナラバ岩波講座ニ書キハシナカッタデアラウ。全然捨テ去ツテ了フニハ未練カアツタ。

併シ岩波講座ニ書イタアノ変換ニハ期待ガ持テナカッタガ、當時ソレ以上突進ンデ考ヘル余裕ガナカッタノデアアル。ソレガ南雲氏ニ拾ヒ上げラレタコトハ實ニ仕合せナコトデアアル。而モ今回ノ結果(140号, 雜記VI)ハソノ簡明ナル点, 一般性ノアル点ニ興味ヲ感ゼシメル、ソノ應用上ノ效果ヲ期待シタイモノデアアル。

2. 函数空間ニ於ケル不動点ノ存在定理ニ関シテハ、自余ノ知レル限り(専門家ノ立場カラ見タラドゥイフコトニナ

ルカ知ラナイが) コレヲ利用スル自分ノ立場カラ見レバ  
*Leray-Schauder* ノ結果 (*Ann. Ec. norm.*,  
 1934) ト *Tychonoff* ノ結果 (*Math. Ann.*, 1935)  
 がニツノ頂点ヲナシテ居ル。シカシコノニツダケデハ未ダ  
 ナカデナイ。コレ等ヲ含ムモット廣イ定理が得ラレタラ、  
 ドンナニカ便利デアラウ。 *Tychonoff* ノ如ク廣イ空  
 間ニツイテ *Leray-Schauder* ノ如キ形ノ定理が欲  
 シイモノデアイル。

3. *Leray-Schauder* ハ *Banach* ノ空間ニ  
 於イテ  $\bar{\omega}$  ( $\omega$  ノ閉集合) ナ連続統 (*vollstetig*) ナ  
 変換  $f(x) = \alpha$  シテ  $\Phi(x) \equiv x - f(x)$  ト置キ、次ノ三ツノ  
 性質ヲ持ツ数  $d(\Phi, \omega, a)$  ノ存在ヲ証明シテキル。コレ  
 ヲ *degré topologique de la transformation*  
 $\Phi$  *au point a* ト呼ンデイル。

$$1^\circ \quad \omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1, \omega_2 = 0 \quad \text{ナラバ}$$

$$d(\Phi, \omega, a) = d(\Phi, \omega_1, a) + d(\Phi, \omega_2, a)$$

但シ  $\omega'_1, \omega'_2 \supset \omega_1, \omega_2$  ノ縁トシタトキ  $a \in \Phi(\omega'_1)$ ,  
 $\Phi(\omega'_2)$  ノ上ニハナイモノトスル。

$$2^\circ \quad d(\Phi, \omega, a) \neq 0 \quad \text{ナラバ} \quad a \in \Phi(\omega).$$

$$3^\circ \quad a \text{ カ } \Phi(\omega') \quad (\omega' \text{ ハ } \omega \text{ ノ縁}) \text{ ノ上ニ來ナイヤウ} \\
= a, f, \omega \text{ ガ連続的ニ変ルトキ } d(\Phi, \omega, a) \text{ ノ} \\
\text{値ハ変化シナイ。}$$

尚. *Leray-Schauder* ノ定義ニヨレバ  $d(\Phi, \omega, a)$   
 ハ常ニ整数値ヲ取り、 $a \in \omega$  ナルトキ  $d(x, \omega, a) = 1$

トナル。

$a \in \omega$  ナラバ  $3^\circ =$  ヨリ  $d(x - \lambda a, \omega, (1 - \lambda)a)$  ハ  
変化シナイカラ  $d(x - a, \omega, 0) = 1$  デアル。  $\omega$  カ凸集  
合デ、  $a \in \omega$  且ツ  $f(\omega) \subseteq \omega$  デ、  $\omega$  ノ縁  $\omega'$  デハ  
 $x \neq f(x)$  ナラバ  $\Phi_\lambda(x) \equiv x - \{a + \lambda[f(x) - a]\}$  ト  
置キ  $3^\circ$ ヲ使フコトニヨリ  $0 \leq \lambda \leq 1$ ニ於テ  $d(\Phi_\lambda, \omega, 0)$   
 $= 1$ ヲ得ル。  $\lambda = 1$ トスレバ  $d(\Phi, \omega, 0) = 1$ 。  $2^\circ =$   
ヨリ  $xc - f(x) = 0$ ナル  $x$ カ  $\omega$ ノ中ニ存在スル。 ユノマ  
テシテ  $\omega \subseteq f(\omega)$ ナル場合ノ不動点ノ存在定理ヲ得ルガ、  
 $d(\Phi, \omega, 0) \neq 0$ ナラバ  $2^\circ =$ ヨリ不動点が存在スルノ  
デ  $\omega \subseteq f(\omega)$ デナイ場合ニモ利用サレル点ガ頗ル便利デ  
アル。

4. コレニ反シテ *Tychonoff* ハ *Hausdorff*  
ノ一次空間カ更ニ局部的凸 (即チ勝手ナ  $0$ ノ近傍  $\nabla(0)$ ニ  
對シテ  $\nabla(0)$ ニ含まレル  $0$ ノ凸近傍が存在スル)ノ場合ニ  
次ノ定理ヲ証明シタ。

*bicomact* ナ凸集合ヲ其自身又ハソノ部分集合ニ  
移ス連続変換ニハ不動点が存在スル。

コレデハ形ノ上デ *Leray-Schauder* ノ結果  
ヨリズット狭イ。 ソレデアルカラ應用トシテハ *Banach*  
ノ空間デハ都合ノワルイ例ヲ擧ゲナクラハ面白クナイ。 併シ  
彼ガ擧ゲタ例ガ感心出來スコトハ南雲氏ト同感デアル。 自  
今ニハ如何ニモ應用セシカタメノ應用トシカ思ヘナイノデ  
アル。

併シ *Tychonoff* の定理の方が *Leray-Schauder* より使イ易イ例ハ極ク手近アル。

# 5. 例へバ

$$(1) \quad Y_j(x) = \int_{a_j}^x f_j(x, y_1, \dots, y_n) dx$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

ナル変換ヲ考ヘル。  $f_j(x, y_1, \dots, y_n)$  ハ

$$(2) \quad a < x < b, \quad |y_i| \leq \omega_i(x), \dots, |y_n| \leq \omega_n(x)$$

ヲ連続テ、 $x_j$  ノ中ノ或ル者ハ  $a$  又ハ  $b$  = 一致シ得ルモノトスル。又  $y_i(x)$  ガ  $a < x < b$  テ  $|y_i(x)| \leq \omega_i(x)$  ヲ満足スルトキ  $|Y_j(x)| \leq \omega_j(x)$  ヲ満足スルモノトスル。

$a < x < b$  テ連続ナ  $n$  個ノ函数ノ組カラ成ル空間ニ於イテ  $y^p = \{y_1^p(x), \dots, y_n^p(x)\}$  ガ  $p \rightarrow \infty$  ノトキ  $y = \{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  = 収斂スルトイフコトヲ  $a < x < b$  = 含マレル勝手ナ閉區間テ  $y_i^p(x)$  ガ  $p \rightarrow \infty$  ノトキ一樣ニ  $y_i(x)$  = 収斂スルト解釈スル、コノ空間ニ於テハ変換 (1) ハ連続ナルガ、ソレハ *Banach* ノ空間デハナイ。(2)ニ於テ

$$|f_j(x, y_1, \dots, y_n)| \leq F_j(x)$$

トナルヤウナ  $F_j(x)$  ヲ取り、 $a < x < b$  テ連続テ

$|y_i(x)| \leq \omega_i(x), \quad |y_i'(x)| \leq F_i(x)$  ヲ満足スル函数ノ組カラナル集合ニ於テ (1) ガ定義サレテキルモノトシテ

*Tychonoff* ノ定理ヲ使ヘバ

$$y_j(x) = \int_{\alpha_j}^x f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx$$

ノ解ノ存在ガ合ル。

6. Banach ノ空間ニ於ケル定理デスヲサウト思ヘバ次ノサウニスル。  $a < \alpha_j < b$  ナラバ  $\alpha_j' = \alpha_j$ ,  $\alpha_j = a$  ナラバ  $\alpha_j' = a + \varepsilon$ ,  $\alpha_j = b$  ナラバ  $\alpha_j' = b - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) ト置き, (1) ノ代リニ

$$Y_j(x) = \int_{\alpha_j'}^x f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx$$

ナル変換ヲ考ヘル。空間トシテハ  $a + \varepsilon \leq x < b - \varepsilon$  デ連続ナル個ノ函数ノ組ヲ取り, 例ヘバ

$$\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} \{|y_1(x)|, \dots, |y_n(x)|\}$$

ト取ル。ソコデ不動点ノ存在定理ヲ使ヒ, 然ル後  $\varepsilon \rightarrow 0$  トスル。

或ハ拙著 *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires* (北大紀要, 1934) ガ述べタマウニシテモヨイ。

複素領域デ同様ノ問題ヲ論ズルトキ, コソナ細工ハ使ヘナイトハ言ハナイガ考ヘ難クナルコトハ事實デアル。コレニ反シテ Tychonoff ノ定理ガ假定シタ compact 性ハ正規族ノ理論ニヨツテ何ノ障礙ニモナラナイ。

併シ微分方程式ノ場合ニハ解ノ或ル(勝手ナ)曲線ノ上ニ於ケル行動ヲ調べルノニ、ソノ曲線ノ上ノ点ヲ実ノ

*parameter* の函数トシテ表ハスコトニヨリ實領域ニ於ケル問題トシテ扱フコトが出来ルカラ *Tychonoff* の定理ガナクテモ大シタ不自由ヲ感ジナイガ、其他ノ函数方程式トナレト、カウイフ細工ハ到底出来ヌ。若シ *Tychonoff* ノ定理ト *Leray-Schauder* ノ結果ヲ含ムヤウナ定理ガ得ラレタナラ微分方程式以外ノ函数方程式ノ研究ニ大イニ役立ッデアラウ。